Concours AMCPEsession 2013

Composition : Mathématiques 6 (statistiques, probabilités)

Durée : 2 Heures

Exercice 1 : Dans certaines exploitations agricoles, on utilise deux types de compléments alimentaires : le type A et le type B. Ces produits sont utilisés par paquets de 5 kilogrammes.
On fait une enquête portant sur le nombre de kilogrammes utilisés par jour dans 10 exploitations différentes, numérotées de 1 à 10, et on obtient les résultats suivants :

Exploitation n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Produit A (en kg)	10	15	15	10	10	15	20	15	20	20
Produit B (en kg)	5	15	10	10	10	5	10	10	15	10

On choisit au hasard une exploitation parmi les dix. A ce tirage, on associe deux variables aléatoires X et Y définies par : X : nombre de kilogrammes de produit A utilisés par jour.

Y : nombre de kilogrammes de produit A utilisés par jour.

1) Montrer que la loi du couple (X, Y) est donnée par le tableau suivant où α est un réel que l'on déterminera.

X \ Y	**5**	**10**	**15**
10	0,1	α	0
15	0,1	α	
20	0	α	0,1

2) **a)** Déterminer la loi de X ; puis calculer son espérance $E(X)$ et sa variance de $V(X)$.

b) Déterminer la loi de Y ; puis calculer son espérance $E(Y)$ et sa variance de $V(Y)$.

3) Calculer la covariance $\text{cov}(X,Y)$ du couple aléatoire (X,Y) .

4) **a)** Déterminer la loi de la variable conditionnelle $Y/(X=10)$; et calculer l'espérance $E\left[Y/(X=10)\right]$.

b) Calculer les espérances $E\left[Y/(X=15)\right]$ et $E\left[Y/(X=20)\right]$.

c) Que peut-on déduire du calcul des trois espérances des questions **a)** et **b)** ?

5) On désigne par S la variable aléatoire égale au poids total en kilogrammes des compléments alimentaires utilisés par jour.

Calculer l'espérance et la variance de la variable S.

6) Le prix d'un kilogramme de produit A est de 6 euros et celui d'un kilogramme de produit B est de 8 euros. Le coût journalier, en euros, des compléments alimentaires est donné par la variable aléatoire C.

a) Exprimer la variable C à l'aide des variables X et Y

b). Calculer l'espérance et la variance de la variable C.

<u>Exercice 2</u> : On a à disposition 2 tests sanguins pour le dépistage du HIV : d'une part l'ELISA, relativement bon marché (environ 20 €) et raisonnablement fiable, et d'autre part le Western Blot (WB), nettement meilleur mais beaucoup plus cher (environ 100 €).

Un patient vient vers vous, un médecin, avec des symptômes vous suggérant qu'il peut être HIV-positif. Pour ce patient, la prévalence du HIV est estimée par la littérature médicale à

P (A) = P (« il est HIV-positif ») = 0,01.

Les données concernant des personnes dont on connaît le statut HIV apportent :

P (« ELISA positif | HIV-positif ») = 0,95 ; P (« ELISA négatif | HIV-négatif ») = 0,98.

1) Calculer les probabilités suivantes :

P (« HIV-positif | ELISA négatif ») et P (« HIV-négatif | ELISA positif »).

2) Quelle(s) conséquence(s) peut-on en tirer sur l'utilisation de l'ELISA ?

<u>Exercice 3</u> :

1) On considère la fonction f définie par $f(t)=\begin{cases} \alpha t(30-t), & \text{si } t\in \left]0,30\right[\\ 0 & \text{, sinon} \end{cases}$ où $\alpha\in\mathbb{R}$.

Déterminer α pour que f soit une densité de probabilité d'une variable aléatoire absolument continue.

2) La durée de séjour, en minutes, d'un bovin dans une salle de traite est une variable aléatoire D qui admet f comme densité.

a) Déterminer la fonction de répartition F_D de la variable aléatoire D.

b) Calculer l'espérance mathématique $E(D)$ de D.

c) Déterminer l'écart-type de la variable D.

3) Soit N un entier supérieur ou égal à 1 et β un réel appartenant à $\left]0,30\right[$.

A l'instant t_0 , il y a N bovins la salle de traite et l'on s'intéresse au nombre $Q(\beta)$ de bovins qui vont la quitter dans l'intervalle de temps $[0,\beta]$.

On suppose que les comportements des différents bovins sont indépendants et que, pendant l'intervalle de temps considéré, aucun nouveau bovin n'est entré dans la salle.

On numérote les N bovins de 1 à N ; on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le bovin numéro i est sorti de la salle avant l'instant β et 0 sinon.

a) Déterminer la loi de la variable X_i et son espérance.

b) Déterminer la loi de la variable $Q(\beta)$.

c) Donner l'espérance et la variance de $Q(\beta)$.